Método de cálculo de puentes colgantes según Müller-Breslau

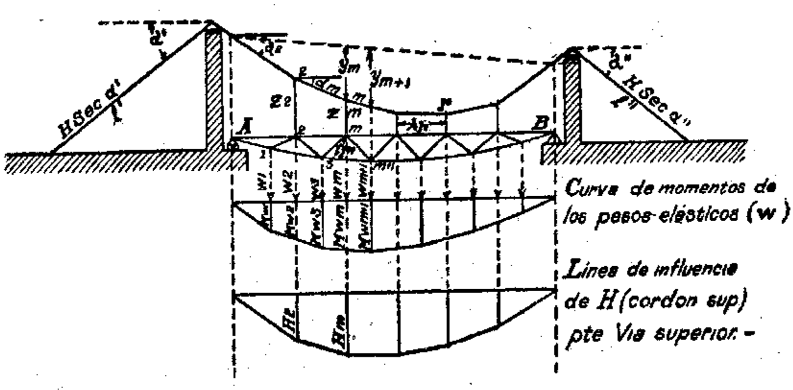
por

C. OLAVARRIETA

(Conclusión)

CASO DE LOS PUENTES COLGANTES DE UN TRAMO

Como vimos al comienzo de este estudio es necesario determinar H para resolver el problema.



es nos dan para H los siguientes valores

$$H = P_m \frac{\delta_m}{R}, \quad Ht = \frac{\epsilon E S_c \Sigma F_1 t l}{R}, \quad \Delta H = \frac{E S_c L_1}{R}$$

Siendo $R = \Sigma F_1^2 \, l \frac{S_c}{S}$ o bien

$$\frac{R}{ES_c} = \Sigma \frac{F_1^2 l}{ES}$$

como vimos esta suma es necesario hacerla extensiva a todas las barras del sistema menos a las barras de relleno ya que su influencia es despreciable; siendo F_1 los esfuerzos que se producen en las barras para el estado de carga $H = -1$. Para las barras de las cuerdas superiores e inferiores se tendrá para $H = -1$

$F_1 = -\frac{y_m}{r_m}$; $F_1 = +\frac{y_m}{r_m}$ siendo r la distancia de la barra al nudo opuesto.

De modo que para estas barras se tendrá

$$\Sigma \frac{F_1^2 l_m}{ES_m} = \Sigma \frac{y_m^{\ 2}}{r_m^{\ 2}} \frac{l_m}{ES_m}$$

Para las barras de suspensión tendremos que los valores absolutos de los esfuerzos para el estado de carga $H = -1$; designando por $\alpha_2 \ldots \alpha_m$ etc., los ángulos que forman la cadena con la horizontal son

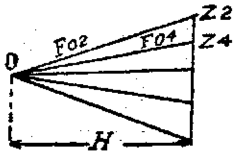
$$Z_2 = H(\text{tg}\alpha_2 - \text{tg}\alpha_4)$$

y para el cable:

$$F_{o2} = H\sec\ \alpha_2$$

En efecto conocido el valor de H, se puede adoptar éste como distancia polar y trazar un haz de rectas paralelas a los trozos de cadena que interceptarán sobre una vertical, magnitudes que representan los esfuerzos de las péndolas y las longitudes de los radios representan los esfuerzos en la cadena.

Luego para el estado de carga $H = -1$ se obtendrán los siguientes esfuerzos:



$$F_{or} = \text{Sec}\ \alpha_r$$

para las barras del cable, y

$$Z_r = (\text{tg}\alpha_r - \text{tg}\alpha_{r+1})$$

para las péndolas, por lo tanto si la longitud de la péndola se denomina por Zr y las de la cadena por Sr se tendrá para estas barras que

$$\Sigma \frac{Z_r(\mathrm{tg}\alpha_r - \mathrm{tg}\alpha_{r+1})^2}{E\,S_{zr}} \qquad \text{péndolas}$$

$$\text{y} \qquad \Sigma \frac{S_r \sec^2\alpha_r}{E\quad S_{sr}} \qquad \text{cadena}$$

Admitiendo para las péndolas secciones constantes Sz y suponiendo para la cadena que la fatiga σ sea constante, se tendrá:

$$\sigma = \frac{H \sec \alpha_r}{S_{sr}} = \frac{H}{S_s} \qquad \text{Siendo } S_s \text{ la sección mínima}$$

Luego $S_{sr} = S_s \sec \alpha_r$; se tendrá

$$\frac{1}{E\,S_z} \Sigma Z_r\,(\mathrm{tg}\alpha_r - \mathrm{tg}\alpha_{r+1})^2 \qquad \text{péndolas}$$

$$\frac{1}{E\,S_s} \Sigma\lambda_r \sec^2 \alpha_r \qquad \text{cadena}$$

Llamemos α' el ángulo que forma el fiador izquierdo con la horinzontal, el esfuerzo será H sec α' y para $H = -1$. $F_1 = -\sec \alpha'$ si la longitud del fiador es l' y su sección $S = S_s \sec \alpha'$ siendo S_s la sección en la clave de la cadena, resulta que:

$$\Sigma \frac{F_1^2 l}{ES} = \frac{l' \sec^2 \alpha'}{E\,S_s \sec \alpha'} = \frac{l' \sec \alpha'}{E\,S_s}$$

y para el fiador derecho tendremos:

$$\frac{l'' \sec \alpha''}{E\,S_s}$$

Luego la expresión

$$\frac{F_1^2 l}{E\,S} = \Sigma \frac{y_m^2}{r_m^2} \frac{l_m}{E\,S_m} + \frac{1}{E\,S_z} \Sigma Z_r \left(\mathrm{tg}\alpha_r - \mathrm{tg}\alpha_{r+1} \right)^2 +$$

$$+\frac{1}{ES_s}\left(\Sigma\lambda_r \sec^2\alpha_r + l' \sec\alpha' + l'' \sec\alpha''\right)$$

Y por lo tanto

$$a)\ R = ES_c\ \Sigma\frac{F_1^2 l}{ES} = \Sigma\frac{y_m^2 l_m}{r_m^2}\frac{S_c}{S_m} + \frac{S_c}{S_z}\Sigma Z_r(tg\alpha_r - tg\alpha_{r+1})^2$$

$$+\frac{S_c}{S_s}(\Sigma\lambda \sec^2\alpha_r + l' \sec\alpha' + l'' \sec\alpha'')$$

Además para determinar los valores δm sabemos que es necesario trazar un poligono funicular de los pesos

$$\omega_m = \frac{M'_m l_m}{r_m^2}\frac{S_c}{S_m} \qquad \text{siendo } M'_m = y_m$$

se tendrá

$$\omega_m = \frac{y_m l_m}{r_m^2}\frac{S_c}{S_m}$$

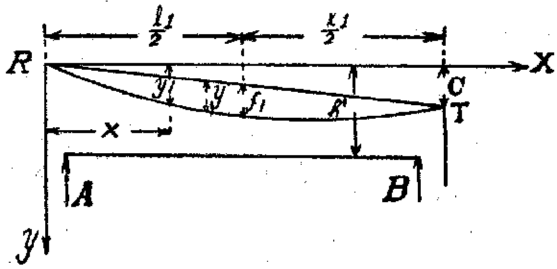
y denominado por $\quad Z_m = \omega_m' y_m = \dfrac{y_m^2 l_m}{r_m^2}\dfrac{S_c}{S_m}$

La expresión a queda $R = \Sigma Z_m + \dfrac{S_c}{S_z}\Sigma Z_r(tg\alpha_r - tg\alpha_{r+1})^2$

$$+\frac{S_c}{S_s}(\Sigma\lambda_r \sec^2\alpha_r + l' \sec\alpha' + l'' \sec\alpha'')$$

Para la 2.ª y 3.ª suma se pueden encontrar fórmulas apróximadas y sencillas bastante exactas. Consideremos que la cadena sea un curva parabólica

La ecuación de la parábola es



$$y' = \frac{4f_1 x(l_1 - x)}{l_1^2} + \frac{Cx}{l_1}$$

En efecto la curva de equilibrio del cable es una parábola cuando soporta una carga uniformemente repartida. Luego tomando momentos respecto de M de todas las fuerzas que actúan a su izquierda, se tiene

$$\frac{pl_1}{2}x - \frac{px^2}{2} - Hy = o$$

ya que el momento resistente del cable es nulo. Luego

$$Hy = \frac{pl_1}{2}x - \frac{px^2}{2}$$

Para $$x = \frac{l_1}{2} \qquad y = f_1$$

$$H f_1 = \frac{pl_1^2}{4} - \frac{pl_1^2}{8} = \frac{pl_1^2}{8}, \quad H = \frac{pl_1^2}{8f_1}$$

$$y = \frac{4f_1^2}{l_1^2}\left(\overset{2}{l_1 - x}\right)$$

$$y' = y + \frac{Cx}{l} = \frac{4f_1 x}{l_1^2}\left(l - x\right) + \frac{Cx}{l_1}$$

Lo que queríamos demostrar Luego:

$$A = \Sigma Z_r (tg\alpha_r - tg\alpha_{r+1})^2 = \lambda\Sigma\,(h' - y')\,\lambda\left(\frac{tg\alpha r - tg\alpha_{r+1}}{\lambda}\right)^2$$

donde λ es el término medio de los paños de ancho λ_r. o bien

$$A = \lambda\int_o^{l_1} (h - y')\,dx \left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)^2 \text{Como } \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{8f_1}{l_1^2}$$

$$A = \lambda\left(\frac{8f_1}{l_1{}^2}\right)^2 \int_0^{l_1} (h' - y')\,dx$$

Y efetuando el integral se tendrá:

$$A = \lambda\left(\frac{8f_1}{l_1^2}\right)^2 l'\left(h' - \frac{2}{3}f_1 - \frac{C}{2}\right)$$

Ahora

$$B = \Sigma\lambda_r \sec^2\alpha_r = \int_o^{l_1} dx\left[1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right] = l_1\left(1+\frac{16}{3}\,\frac{f_1^2}{l_1^2}+\frac{C^2}{l_1^2}\right)$$

Luego

$$R = \Sigma Z_m + \frac{S_c}{S_z}\;\frac{64f_1^2(3h' - 2f_1 - 1{,}5c)\,\lambda}{3l_1^3} + \frac{S_c}{S_s}S_o$$

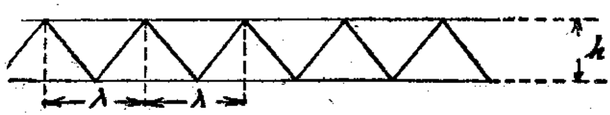
Donde

$$S_o = l_1\left(1+\frac{16}{3}\;\frac{f_1'}{l_1^2}+\frac{C^2}{l_1^2}\right) + l'\sec\alpha' + l''\,\mathrm{Sec}\,\alpha''.\text{—}$$

El término que depende de las dimensiones de las péndolas puede despreciarse, porque su influencia es pequeña. En el cálculo de ω_m y Z_m se puede aceptar para todas las barras de cabeza una misma sección Por lo tanto se tendrá

$$\omega_m = \frac{l_m\,y_m}{r_m^2}$$

y S_c arbitrario se hará igual al área media de las secciones de las cabezas. Sí la cadena se atiesa por medio de una viga de cordones paralelos de altura *h*, dispuesta según la fig.



Se tendrá $$\frac{l_m}{r_m^2} = \frac{\lambda}{h^2} \text{ y } \omega_m = \frac{y_m\,l_m}{r_m^2} = \frac{y_m\lambda}{h^2}.$$

o bien se puede adoptar $\omega_m = y_m$ y $Z_m = y_m\,\omega_m = y_m^2$

y R habrá que multiplicarlo por $\dfrac{h^2}{\lambda}$ cuyo valor será:

$$R_1 = \Sigma y_m^2 + \frac{h^2}{\lambda}\left[\frac{S_c}{S_z}\;\frac{64f_1^2(3h' - 2f - 1{,}5c)\lambda}{3l^2} + \frac{S_c}{S_s}S_o\right]$$

Vimos que para determinar δ_m era necesario conocer dos traslaciones de las cuerdas donde actúan las cargas, y trazar un finicular de los pesos elásticos. En este caso los puntos de apoyo no sufren traslaciones verticales ($\delta = 0$) por lo tanto la línea elástica coincide con la línea de momentos de una viga simplemente apoyada de luz igual a la de la viga atiesadora; es decir $M\omega = \delta$ siempre que la distancia polar del polígono fincular sea igual a uno. Luego

$$H = \frac{P\bar{M}\omega}{R_1}$$

como R_1 es constante, la línea $M\omega$ sirve como línea de influencia de H, cuyo multiplicador es $\frac{1}{R_1}$ Para simplificar las fórmulas del caso en que la viga atiesadora tenga las cuerdas paralelas, supongamos que los pesos elásticos actúen como una carga continua de modo que sobre un elemento dx obra un peso 2y. dx, se pone dos para indicar que en el punto dx hay que considerar los pesos de dos nudos, uno superior y otro inferior. Además en esta hipótesis coinciden las líneas de influencia de $H = \frac{M\omega}{R_1}$ para los casos en que el puente sea de vía superior o inferior.

Como:
$$\frac{d^2M\omega}{dx^2} = -\omega = -2ydx$$

Reemplazado el valor
$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

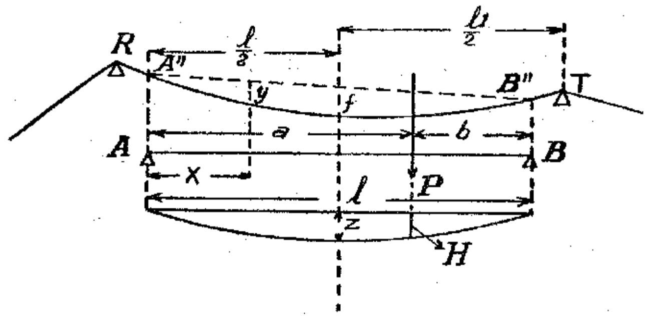
Luego
$$\frac{d^2M\omega}{dx^2} = -2\,\frac{4fx(l-x)}{l^2}\,dx$$

Efectuando dos veces la integral y determinando las constantes por medio de las condiciones de que para x = oyx = l ya que $M\mu = o$ ($\delta = o$) se obtiene

$$M_\omega = \frac{2}{3}\,\frac{f}{l^2}(xl^3 - 2lx^3 + x^4)$$

y para una carga P de la fig.

$$M_\omega = \frac{2}{3}\,\frac{f}{l^2}(al^3 - 2la^3 + a^4)$$



Por lo tanto: $H = \dfrac{P.M\omega}{R_2}$ donde R_2 será despreciando la influencia insignificante de las péndolas

$$R_2 = 2\int_0^l y^2 dx + h^2 \frac{S_c}{S_s} S_o$$

En efecto, siendo $Z = \omega y = 2\,y^2\,dx$; por otra parte teníamos para las cargas concentradas que $\omega = \dfrac{y\lambda}{h^2}$ suponiendo λ infinitivamente pequeño y multiplicando por h^2, se tendrá $\omega = ydx$ para un cordón, luego es necesario multiplicar los términos de R_1 menos el valor de z por dx.

Integrando, se tiene:

$$R_2 = 2\int_o^l y^2 dx + h^2 \frac{S_c}{S_s} S_o + \frac{16}{15} f^2 \; l + h^2 \frac{S_c}{S_s} S_o$$

La línea de influencia de H se aproxima mucho a una parábola, luego la reemplazaremos por una parábola de tal manera que el área comprendida entre el eje de las absisas y cada una de las curvas sean iguales entre sí, para lo cual se debe satisfacer la condición:

$$\frac{2}{3} Zl = \frac{P}{R_2} \int_o^l M_\omega \, dx$$

$$\frac{2}{3} Zl = \frac{P}{R_2} \int_o^l \frac{2\,f}{3\,l^2} (x\,l^3 - 2\,l\,x^3 + x^4)\,dx \;\therefore\; Z = \frac{P}{R_2} f \frac{l^2}{5}$$

Reemplazando R_2 por su valor se obtiene:

$$Z = \frac{3 P l V}{16 f}$$

Donde

$$V = \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{h^2}{f^2} \frac{S_o}{l} \frac{S_c}{S_s}}$$

Y la ecuación de la parábola en función de la flecha según vimos es:

$$H = \frac{4 Z a b}{l^2} = \frac{4 P a b V}{4 f l}$$

En estas ecuaciones

$$S_o = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{C^2}{l_1^2} \right) + l' \sec \alpha' + l'' \sec \alpha''$$

S_c es la sección media de las cuerdas y S_s la sección de la clave de la cadena.

Tracción horizontal debido a un cambio de temperatura.

Es necesario recordar que al multiplicar los pesos ω_m por una cantidad, el valor

$$H = \frac{P_m \delta_m}{R_1}$$

debido a la acción de una carga no varía, ya que tanto el numerador (δ_m) como el denominador R_1 se han multiplicado por igual cantidad, pero para

$$H_t = \frac{\epsilon E S_c \Sigma F_1 t l}{R}$$

si en lugar de R se colocara R_1 sería necesario multiplicar el númerador por $\frac{h^2}{\lambda}$ y si colocáramos R_2 sería necesario multiplicar por h^2.

Luego:

$$Ht = \frac{\epsilon E S_c t \Sigma F_1 l}{R}$$

El cálculo demuestra que la influencia de los esfuerzos F_1 de las barras de la viga en la expresión $\Sigma F_1 l$ es insignificante y que basta considerar solamente los valores F_1 l correspondientes a las barras de las cadena y de las péndolas (barras de suspensión)

Tendremos entonces para el cable que:

$$\Sigma F_1 l = -\Sigma S \sec \alpha = -\Sigma \lambda \sec^2 \alpha$$

y para el caso en que el cable sea parabólico, según vimos:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_1 l = -\Sigma \lambda \sec^2 \alpha = -l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{C^2}{l_1^2}\right) \\ &\text{Para los fiadores} \\ &\Sigma F_1 l = -(s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'') \end{aligned}\right\} = -S_o$$

Para las péndolas

$$\Sigma F_1 l = -\Sigma Z_r (tg\alpha_r - tg\alpha_{r+1}) = -(h' - y')\, \lambda \left(\frac{tg\alpha_r - tg\alpha_{r+1}}{\lambda}\right) = \int_o^{l_1} (h' - y')\, dx \, \frac{d^2y'}{dx^2}$$

$$= \frac{8f_1}{l_1^2} \int_o^{l_1} (h' - y') dx = \frac{8\,f_1}{l_1^2}\, l_1 \left(h' - \frac{2}{3}\, f_1 - \frac{C}{2}\right)$$

Luego:

$$H_t = \frac{\epsilon\, E\, S_c\, t}{R} \left[S_o + \frac{8f_1(3h' - 2f_1 - 1,5C)}{3l_1}\right]$$

Luego a un aumento de temperatura del montaje corresponde una disminución de H.

Para el caso en que la viga atiesadora sea de cordones paralelos la ecuación de H_t se puede simplificar. En efecto despreciando la influencia pequeña de las péndolas y sustituyendo

$$R = \frac{R_2}{h^2} = \frac{16}{15} \frac{f^2 l}{h^2} + \frac{S_c}{S_s} S_o$$

se obtiene:

$$Ht = -\epsilon \, E \, S_c \, t \, S_o \times \frac{15h^2}{16 f^2 l} \frac{S_s}{S_s} \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{h^2}{f^2} \frac{S_o}{l} \frac{S_c}{S_s}}$$

después de una pequeña transformación se llega a que:

$$Ht = -\epsilon \, E \, S_s \, t \, (1 - V)$$

siendo

$$V = \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{h^2}{f^2} \frac{S_o}{l} \frac{S_c}{S_s}}$$

LÍNEAS DE INFLUENCIA

Para el cálculo de las cuerdas es necesario trazar las líneas de influencia de los momentos de flexión en los diferentes nudos de la viga. Hemos visto que:

$$M_m = M_{o\,m} - H y_m$$

o bien

$$M_m = y_m \left(\frac{M_{o\,m}}{y_m} - H \right)$$

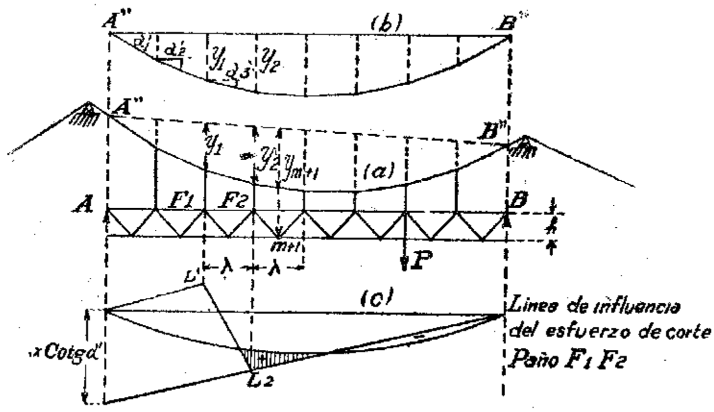
Luego para trazar la línea de influencia de M_m para un nudo cualquiera será necesario trazar la línea de $\frac{M_{o\,m}}{y_m}$ y restarle los valores de la línea de influencia de H.

LÍNEA DE INFLUENCIA DE LOS ESFUERZOS DE CORTE.

La ecuación de los esfuerzos de corte para un paño cualquiera (F_1, F_2) es en vista de que las cargas son verticales

$$T = \frac{M_2 - M_1}{\lambda} = \frac{M_{o\,2} - H y_2 - M_{o\,1} + H y_1}{\lambda} = T_o - H \frac{y_2 - y_1}{\lambda}$$

Donde T_o es el esfuerzo de corte en el paño (F_1, F_2) de la viga simplemente apoyadas AB.



Llevando las ordenadas y_1, y_2 a partir de una línea de cierre horizontal (fig. b) y designando por α' el ángulo de inclinación de la nueva catenaria así obtenida, podemos establecer la siguiente ecuación:

$$T = T_o - H \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha' \, (T_o \operatorname{cotg}\alpha' - H)$$

Valores que nos conducen a las líneas de influencia mostradas en la figura.

PUENTES COLGANTES DE VARIOS TRAMOS, CON VIGAS ATIESADORAS SIMPLEMENTE APOYADAS.

Este caso, como el caso de un tramo, es indeterminado en el primer grado, y como incógnita se toma el valor H (tracción horizontal del cable).

Ahora el valor $H = \dfrac{P_m \ \delta_{m1}}{R}$ donde R es igual $\Sigma F_1^2 \, l \dfrac{S_c}{S}$

Y donde la expresión de la suma debe extenderse a todos los tramos.

Por otra parte $\delta_{m1} = M_\omega$, luego es necesario trazar las líneas de momento de los pesos elásticos para cada tramo separadamente como vigas simplemente apoyadas.

Para el caso en que las vigas atiesadoras sean de cabezas paralelas y el cable describa una parábola se tendrá que, la flecha Z de la parábola que nos da la línea de influencia de H, para un tramo cualquiera es según la pág. 11.

$$Z = \frac{P}{R_2} f \frac{l^2}{5}$$

$$\text{donde } R_2 = \Sigma\left(\frac{16}{15} f^2\ l\ + h^2 \frac{S_c}{S_s}\ S_o\right) = \frac{16}{15}\Sigma f^2 l + h^2 \frac{S_c}{S_s} \Sigma\ S_o$$

(siendo h constante)

$\Sigma f^2 l' = f'^2 l' + f''^2 l'' + f'''^2 l''' + \text{———————}$ etc., suma de los $f^2 l$ para todos los tramos.

$$\Sigma\ S_o = l'_1\left(1 + \frac{16}{3}\ \frac{f'^2_1}{l'^2_1} + \frac{C'^2}{l'^2}\right) + l''_1\left(1 + \frac{16}{3}\ \frac{f_1''^2}{l''^2} + \frac{C''^2}{l''^2_1}\right)$$

$$\text{——————} + l_o' \sec \alpha' + l_o'' \sec \alpha''. -$$

Basta conocer Z para tener determinada la línea de influencia H.

Tracción horizontal debido a un cambio de temperatura

$$Ht = \frac{\epsilon\, E\, S_c\, t\, \Sigma\, F_1\, l}{R}$$ (1 longitud de las barras)

donde $$R = \frac{R_2}{h^2}$$

y $\Sigma\, F_1\, l = \Sigma \left[S_o + \frac{8\ f_1\ (3h' - 2f_1 - 1{,}5C)}{3l_1}\right]$ suma que se extiende a todos los tramos.